

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 16 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 32.

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

A.2. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 60.

Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει η ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Απόδειξη

Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της οποιασδήποτε γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε θα είναι: $\eta\mu\omega = y$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = x$

Επειδή όμως,

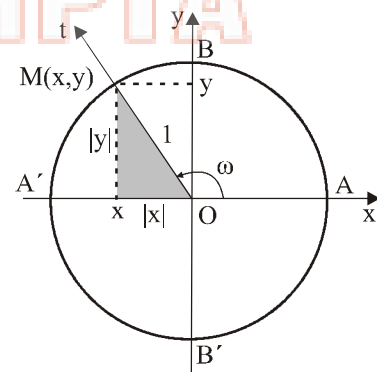
$$(OM)^2 = 1 \text{ και } (OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

θα ισχύει:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1.$$



A.3. Θεωρία Σχολικό Βιβλίο (έκδοση 2012) σελίδα 174.

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε:

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow \log_{\alpha} \theta = x$$

Ισοδύναμα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

Ο $\log_{\alpha} \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε το θ .

- A.4. α) Σωστή
β) Σωστή
γ) Σωστή
δ) Λάθος
ε) Σωστή

ΘΕΜΑ Β

B.1. Πρέπει $P(1) = 3\alpha + 1$

$$\text{Άρα } 1^3 + 2\alpha - \alpha^2 + 2 = 3\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -2.$$

B.2.α. Για $\alpha = 1$ είναι $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x + 2 & x^2 + x + 1 \\ -x^3 - x^2 - x & x + 1 \\ \hline x^2 - 2x + 2 & \\ -x^2 - x - 1 & \\ \hline -3x + 1 & \end{array}$$

Έτσι σύμφωνα με την Ευκλείδεια διαίρεση του $P(x)$ με το $Q(x)$ το πηλίκο είναι $\pi(x) = x + 1$, ενώ το υπόλοιπο $\upsilon(x) = -3x + 1$.

B.2.β. Για να ορίζεται η ανίσωση πρέπει $Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \neq 0$, είναι $\Delta = -3$ οπότε το τριώνυμο $Q(x) = x^2 + x + 1$ δεν έχει ρίζες, δηλαδή ισχύει $x^2 + x + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα $x^2 + x + 1 > 0$ αφού είναι ομόσημο του $a = 1 > 0$.

Διαδοχικά έχουμε

$$\frac{P(x) + x - 2}{Q(x)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 2x^2 - x + 2 + x - 2}{x^2 + x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + x + 1} \geq 1 \stackrel{x^2 + x + 1 > 0}{\Leftrightarrow} x^3 + 2x^2 \geq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x+1) - (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) \geq 0. \quad (\text{Σχόλιο 1})$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x+1)^2$	+	0	+	+
$x-1$	-	0	+	+
Γινόμενο	-	0	+	+

Από τον παραπάνω πίνακα πρόσημου έχουμε ότι η ανίσωση $(x+1)^2(x-1) \geq 0$ επαληθεύεται για $x \in [1, +\infty)$ ή $x = -1$. (Σχόλιο 2)

(1) Σχόλιο:

Συνήθως μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος οπότε έχουμε $\frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + x + 1} - 1 \geq 0$. Στη συνέχεια κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα και παίρνουμε $\frac{x^3 + 2x^2 - (x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \geq 0$. Εδώ όμως παρατηρούμε ότι το $Q(x) = x^2 + x + 1$ έχει $\Delta = -3 < 0$ οπότε έχει το ίδιο πρόσημο με το $a = 1 > 0$, δηλαδή ισχύει $x^2 + x + 1 > 0$ οπότε μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών χωρίς να αλλάξουμε τη φορά.

(2) Σχόλιο:

Το $'=''$ της $(x+1)^2(x-1) \geq 0$ επαληθεύεται για $x = -1$ ή $x = 1$ ενώ το $'>'$ επαληθεύεται για $x \in (1, +\infty)$ έτσι έχουμε $x \in \{-1\} \cup [1, +\infty)$.

B.2.γ. Πρέπει $Q(x) = x^2 + x + 1 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα $P(x) = x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Η εξίσωση γίνεται:

$$x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow (x + 1)^2 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x = 0$$

η οποία είναι δεκτή.

Σχόλιο:

Για κάθε $x \geq -1$ και τα δυο μέλη της εξίσωσης $x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1}$ είναι μη αρνητικά οπότε υψώνουμε στο τετράγωνο.

Εναλλακτικά:

$$x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow (x + 1)^2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x = 0$$

Κάνουμε επαλήθευση. Για $x = 0$ η $x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1}$ μας δίνει $0 + 1 = \sqrt{0^2 + 0 + 1}$ το οποίο ισχύει. Άρα η ρίζα $x = 0$ είναι δεκτή.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Επειδή $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \beta x\right) = -\sigma\upsilon\nu(\beta x)$ τότε $f(x) = -\alpha\sigma\upsilon\nu(\beta x)$.

Πρέπει $f(0) = -2$ και $f(\pi) = -1$.

Άρα $-\alpha \sin 0 = -2 \Leftrightarrow \alpha = 2$ και $-\alpha \sin(\beta\pi) = -1 \Leftrightarrow \sin(\beta\pi) = \frac{1}{\alpha}$

δηλ. $\sin(\beta\pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \beta\pi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $\beta\pi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$).

Έτσι $\beta = 2\kappa + \frac{1}{3}$ ή $\beta = 2\kappa - \frac{1}{3}$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$).

Έστω $\beta = 2\kappa + \frac{1}{3}$, πρέπει $0 \leq 2\kappa + \frac{1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 2\kappa \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{1}{3}$.

Άρα $\kappa = 0$, οπότε $\beta = \frac{1}{3}$.

Έστω $\beta = 2\kappa - \frac{1}{3}$, πρέπει $0 \leq 2\kappa - \frac{1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 2\kappa \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \kappa \leq \frac{2}{3}$ που είναι αδύνατη γιατί $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Έχουμε λοιπόν $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{3}$.

Άρα $f(x) = -2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

Γ.2. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2$$

και αφού είναι $f(0) = -2$ και $f(3\pi) = 2$ έχουμε
 $f(0) \leq f(x) \leq f(3\pi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έτσι, η f παρουσιάζει

- ελάχιστο για $x=0$ το $f(0) = -2$
- μέγιστο για $x=3\pi$ το $f(3\pi) = 2$

Εναλλακτικά:

Επειδή $f(x) = -2\sin\left(\frac{x}{3}\right)$, το ελάχιστο της f είναι το -2 και το μέγιστο το 2 .

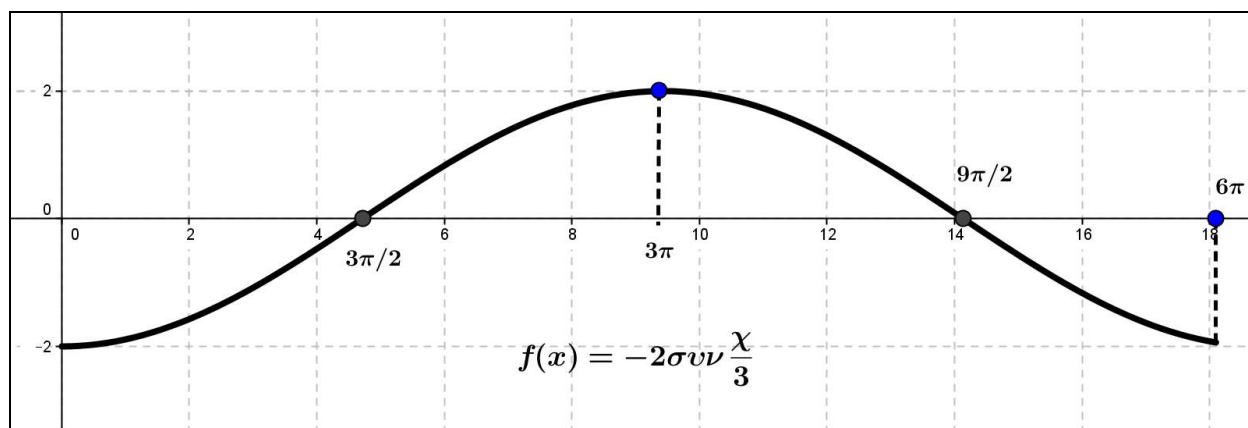
(σχόλιο σελ.81)

Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6\pi]$ είναι ο εξής:

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
$f(x)$	-2	0	2	0	-2

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση.



Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3\pi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3\pi, 6\pi]$.

Γ.3. Είναι

$$f(0) = -2, \quad f(\pi) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1, \quad f(2\pi) = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{και}$$

$$f(2014\pi) = -2 \sin\left(\frac{2014\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(\frac{671 \cdot 3\pi + \pi}{3}\right) = -2 \sin\left(671\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$-2 \sin\left(670\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\frac{\pi}{3} = 1.$$

Έτσι, το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} -2\lambda x + y = 4\lambda \\ -\lambda x + \lambda y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Έχουμε } D = \begin{vmatrix} -2\lambda & 1 \\ -\lambda & \lambda \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + \lambda = -\lambda(2\lambda - 1).$$

$$\text{Πρέπει } D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Για } \lambda = 0 \text{ το σύστημα γίνεται } \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ που είναι αόριστο.}$$

$$\text{Για } \lambda = \frac{1}{2} \text{ το σύστημα γίνεται } \begin{cases} -x + y = 2 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 2 \\ -x + y = 0 \end{cases} \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα το (Σ) για $\lambda = 0$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (\kappa, 0) \text{ για κάθε } \kappa \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Πρέπει $4 \cdot 2^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2^x \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x \neq 2^{-2} \Leftrightarrow x \neq -2$

$$\text{και } \frac{4 - 2^x}{4 \cdot 2^x - 1} > 0 \Leftrightarrow (4 - 2^x)(4 \cdot 2^x - 1) > 0.$$

Έστω $2^x = \omega$ τότε $(4 - \omega)(4\omega - 1) > 0$.

x	$-\infty$	$1/4$	4	$+\infty$
$4 - \omega$	+	+	0	-
$4\omega - 1$	-	0	+	+
Γινόμενο	-	0	+	-

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε $\frac{1}{4} < \omega < 4$ όμως $2^x = \omega$

Έτσι $2^{-2} < 2^x < 2^2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ (Σχόλιο 1)

(επειδή η 2^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού έχει βάση $2 > 1$)

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (-2, 2)$.

(1) Σχόλιο:

Από την επίλυση των παραδειγμάτων σελ. 167 του σχολικού βιβλίου προκύπτει ότι εφαρμόστηκε η πρόταση:

Όταν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, για αυτόν το λόγο την εφαρμόσαμε πιο πάνω χωρίς απόδειξη.

Δ.2. Για κάθε $x \in (-2, 2)$ τότε και $-x \in (-2, 2)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{4 - 2^{-x}}{4 \cdot 2^{-x} - 1}\right) = \ln\left(\frac{4 - \frac{1}{2^x}}{\frac{4}{2^x} - 1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{4 \cdot 2^x - 1}{2^x}}{\frac{4 - 2^x}{2^x}}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{4 \cdot 2^x - 1}{4 - 2^x}\right) = \ln\left(\frac{4 - 2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right)^{-1} = -f(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή η f είναι περιττή συνάρτηση.

Δ.3. Πρέπει $f(x) = h(x)$, όπου $x \in (-2, 2)$.

$$\text{Διαδοχικά έχουμε } \ln\left(\frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right) = x \ln 2 - \ln 3$$

$$\ln\left(\frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right) = \ln\left(\frac{2^x}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1} = \frac{2^x}{3} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 2^x = 12 - 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2(2^x)^2 + 2^x - 6 = 0.$$

$$\text{Έστω } 2^x = \omega > 0, \text{ τότε } 2\omega^2 + \omega - 6 = 0.$$

$$\text{Άρα } \omega = -2 \text{ (απορρίπτεται)} \text{ ή } \omega = \frac{3}{2} \text{ δεκτή αφού } -2 < x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2^x < 4$$

και προφανώς $\frac{1}{4} < \frac{3}{2} < 4$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν κοινό σημείο.

$$\text{Είναι } 2^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$$

Άρα το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων f και h έχει τετμημένη $x_0 = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$.

Δ.4. Επειδή $\ln^2(e^2) = (\ln e^2)^2 = (2 \ln e)^2 = 4$ η ανίσωση γίνεται:

$$-4f(x) > 4f(-x) + \ln^2|x| - \ln x^2 - 3 \text{ πρέπει } x \in A = (-2, 2) \text{ και } |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

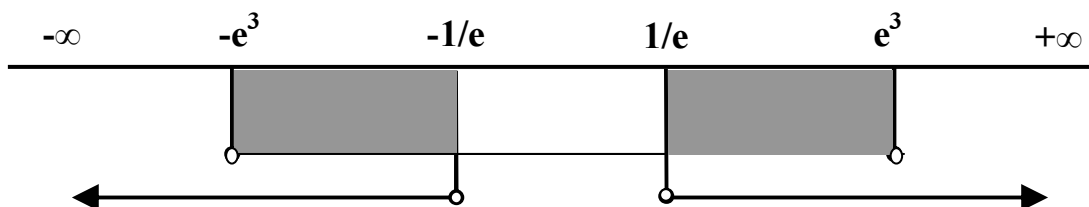
$$\text{Άρα } x \in (-2, 0) \cup (0, 2).$$

Όμως η f είναι περιττή, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ οπότε η παραπάνω ανίσωση γίνεται $\ln^2|x| - 2 \ln|x| - 3 < 0$.

$$\text{Έστω } \ln|x| = \omega \text{ τότε } \omega^2 - 2\omega - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < \omega < 3.$$

$$\text{Δηλαδή } -1 < \ln|x| < 3 \Leftrightarrow \ln e^{-1} < \ln|x| < \ln e^3 \Leftrightarrow e^{-1} < |x| < e^3 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < |x| \text{ και } |x| < e^3$$

$$\text{ισοδύναμα } x < -\frac{1}{e} \text{ ή } x > \frac{1}{e} \text{ και } -e^3 < x < e^3$$



Από το παραπάνω σχήμα έχουμε λύσεις $x \in (-e^3, -\frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, e^3)$.

$$\text{Επειδή όμως πρέπει } x \in (-2, 0) \cup (0, 2), \text{ τότε } x \in (-2, -\frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, 2).$$